

比例边界单元法模拟混凝土梁混合裂缝扩展*

余学芳, 刘国华

(浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 基于线弹性断裂力学 (LEFM), 采用比例边界有限单元法 (SBFEM) 模拟了混凝土梁混合裂缝扩展。通过与非线性有限单元法 (NFM) 模拟结果的对比, 说明了 SBFEM 能预测裂缝扩展轨迹, 并能准确有效计算荷载位移曲线及其作用点的挠度曲线。

关键词: 比例边界有限单元法; 应力强度因子; 混合裂缝模型; 线弹性断裂力学

中图分类号: TU311.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 02-0023-05

断裂是衡量结构损伤和破坏主要的手段。为了计算结构抗裂和抵抗荷载的能力, 近几年相当多的研究致力于模拟像混凝土和陶瓷等脆性材料结构中的裂缝扩展。现在广泛采用线弹性断裂力学 (LEFM) 用于大体积混凝土结构如大坝, 对于常规尺寸结构如混凝土梁, 用非线性断裂力学并结合断裂过程区 (FPZ) 和虚拟裂缝模型 (CCM) 能获得较高的计算精度^[1-2]。尽管 LEFM 不能得出准确的荷载与位移曲线, 但能预测裂缝轨迹并与实验结果很好地吻合^[3-5]。

现在模拟裂缝扩展占主导地位的数值方法是有限单元法 (FEM)^[6-7]。FEM 在模拟单一裂缝方面取得了很大的成功, 但在模拟多裂缝方面仍处在初始阶段, 即使在计算单一裂缝问题过程中, 由于 LEFM 和非线性有限元 (NFM) 在自动模拟裂缝扩展时需要采用复杂的网格重分步骤, 计算任务艰巨^[8]。另外, NFM 自动模拟裂缝还面临三方面的困难: 第一, 缺乏一个行之有效的裂缝扩展准则。最大主应力准则假设当裂尖应力达到混凝土抗拉强度时^[9], 裂缝沿着垂直于最大主应力的方向扩展。此准则需要好的裂尖网格才能使计算出的裂尖应力准确, 但加剧了在进行网格重分时的复杂性。文献[2]开发了一个基于能量的裂缝扩展准则, 认为在 FPZ 内当应变能释放率大于能量扩散率时, 裂缝扩展方向垂直于最大主应力。它已成功模拟单一裂缝和多裂缝问题的裂缝扩展^[6-7], 但是准确性还需进一步证实。第二个困难是在自动模拟裂缝扩展中, 由于材料软化、边界改变和网格改变产生的强烈非线性, 带来的方程系统的复杂性。最近已证实局部

弧长法能有效的求解由于材料软化和剧烈跳回的非线性方程系统^[6-7], 然而计算费用高加上发散、不稳定和其它原因产生的数值问题有可能发生, 特别是多裂缝问题。第三个困难是, 在网格重分后, 通常采用的网格映射和直接线性插值法的不准确将导致荷载步收敛慢甚至发散^[10-11]。这些困难对模拟裂缝扩展产生了严重的挑战。

基于上述困难, 本文尝试采用比例边界有限元法 (SBFEM) 来自动模拟裂缝扩展, 它能克服 NFM 所面临的困难。SBFEM^[12]结合了 FEM 和边界单元法 (BEM) 的优点, 只需求出半解析解, 且使问题降低了一维。其次是裂尖的应力奇异可通过应力方程表示, 应力强度因子 (SIFS) 可通过定义直接求出^[13], 因为 SBFEM 能从半解析应力方程求出 SIFS, 区域可根据需要划分成小区域, 在小区域边界或区域边界根据精度要求确定结点密度, 这样模拟裂缝扩展比 FEM 灵活。另外, SBFEM 的网格映射是基于旧网格的半解析解, 所以在新的网格中获得的结点位移精度高, 可作为下一荷载步的初始值。

1 SBFEM 的基本原理

通过中心 O 划一条曲线 S 表示一个区域, 从中心 O 能看到所有边界, 把区域分成许多小区域, 每个小区域各有中心, 径向坐标为 ξ , 环向坐标用 S 表示。如图 1 中表示了 $\xi = 0.5$ 的环向曲线。

对于区域内任意一点 (ξ, s) 位移, 假设

$$u(\xi, s) = N(s)u(\xi) \quad (1)$$

其中 $N(s)$ 是环向形函数, $u(\xi)$ 为径向位移。

* 收稿日期: 2007-09-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50579081)

作者简介: 余学芳 (1971 年生), 女, 博士生; E-mail: hzpjyxf@163.com

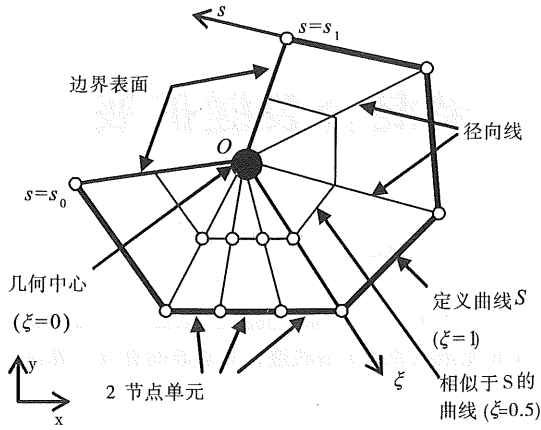


图 1 SBFEM 的概念

Fig. 1 The concept of the scaled boundary finite-element method

取笛卡尔坐标为:

$$x = x_0 + \xi x_s(s), y = y_0 + \xi y_s(s) \quad (2)$$

其中 (x_0, y_0) 是中心 O 的坐标; $x_s(s)$ 和 $y_s(s)$ 是曲线 S 相应于 s 的函数。

本构关系:

$$\sigma(\xi, s) = D\epsilon(\xi, s) \quad (3)$$

$\sigma(\xi, s)$, $\epsilon(\xi, s)$ 和 D 分别是应力向量、应变向量和弹性矩阵。

应变与位移的关系为:

$$\epsilon(\xi, s) = Lu(\xi, s) \quad (4)$$

L 是应变矩阵。把 (1) 和 (4) 代入 (3)

$$\sigma(\xi, s) = DLN(s)u(\xi) \quad (5)$$

把 L 映射到 SBFEM 坐标中得:

$$L = b^1(s) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} b^2(s) \frac{\partial}{\partial s} \quad (6)$$

把 (6) 代入 (5)

$$\sigma(\xi, s) = DB^1(s)u(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} DB^2(s)u(\xi) \quad (7)$$

其中 $B^1(s) = b^1(s)N(s)$, $B^2(s) = b^2(s)N(s)_{,s}$ (8)

没有体积力作用的虚功方程为:

$$\int_V \delta \epsilon(x, y)^T \sigma(x, y) dV - \int_V \delta u(s)^T t(s) ds = 0 \quad (9)$$

$t(s)$ 是边界力, 由边界力产生的平衡边界结点力为^[14]:

$$p = E^0 u(\xi)_{,\xi} + E^{1T} u(\xi) |_{\xi=1} \quad (10)$$

SBFEM 的平衡方程为:

$$E^0 \xi^2 u(\xi)_{,\xi\xi} + (E^0 + E^{1T} - E^1) \xi u(\xi)_{,\xi} - E^2 u(\xi) = 0 \quad (11)$$

E 为系数矩阵, 表示为

$$E^0 = \int_S B^1(s)^T DB^1(s) |J(s)| ds$$

$$E^1 = \int_S B^2(s)^T DB^1(s) |J(s)| ds$$

$$E^2 = \int_S B^2(s)^T DB^2(s) |J(s)| ds \quad (12)$$

从方程 (11) 和 (12) 看出方程只与 S 有关, 系数矩阵只取决于边界。

2 SBFEM 计算步骤

对方程 (1) 通过插值, 形式为

$$u(\xi) = c_1 \xi^{\lambda_1} \varphi_1 + c_2 \xi^{\lambda_2} \varphi_2 + \dots \quad (13)$$

对于每个变形位移采用下列形式 (不考虑下标)

$$u(\xi) = \xi^\lambda \varphi \quad (14)$$

方程 (14) 代入 (10)

$$q = (E^{1T} + \lambda E^0) \varphi \quad (15)$$

方程 (13) 代入 (11) 并结合 (15) 得到标准线性方程

$$\begin{bmatrix} -E^{0-1} E^{1T} & E^{0-1} \\ -E^1 E^{0-1} E^{1T} + E^2 & E^1 E^{0-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \varphi \\ q \end{Bmatrix} \quad (16)$$

方程 (11) 可写成

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i \xi^{\lambda_i} \varphi_i \quad (17)$$

对边界, (17) 变为

$$u_b = \Phi c \quad \text{或} \quad c = \Phi^{-1} u_b \quad (18)$$

把方程 (17) 代入 (10)

$$p = (E^0 \Phi[\lambda]) + E^{1T} \Phi) c \quad (19)$$

方程 (17) 代入 (18)

$$p = (E^0 \Phi[\lambda] \Phi^{-1} + E^{1T}) u_b = K u_b \quad (20)$$

其中对于边界自由度的刚度矩阵是

$$K = E^0 \Phi[\lambda] \Phi^{-1} + E^{1T} \quad (21)$$

最后

$$u(\xi, s) = N(s) \left[\sum_{i=1}^n c_i \xi^{\lambda_i} \varphi_i \right] \quad (22)$$

$$\sigma(\xi, s) = DB^1(s) \left[\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \xi^{(\lambda_i-1)} \varphi_i \right] +$$

$$DB^2(s) \left[\sum_{i=1}^n c_i \xi^{(\lambda_i-1)} \varphi_i \right] \quad (23)$$

$$\sigma(\xi, s) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \xi^{(\lambda_i-1)} \psi_i(s) \quad (24)$$

$$\psi_i(s) = \begin{cases} \psi_{xx}(s) \\ \psi_{yy}(s) \\ \psi_{xy}(s) \end{cases} = D[\lambda_i B^1(s) + B^2(s)] \varphi_i \quad (25)$$

3 计算 SIF

根据断裂力学理论, 模型 I 和模型 II 的 SIF 为

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \begin{matrix} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} |_{\theta=0} \\ \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy} |_{\theta=0} \end{matrix} \right\} \quad (26)$$

r 和 θ 为极坐标, r 和 ξ 的关系为

$$r = \xi L(\theta) \quad (27)$$

把方程 (24) 代入 (26) 并考虑 (27) 得

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} \sqrt{2\pi L(\theta)} \sum_{i=1}^n c_i \xi^{(\lambda_i-0.5)} \psi_{yy} \Big|_{\theta=0} \\ \sqrt{2\pi L(\theta)} \sum_{i=1}^n c_i \xi^{(\lambda_i-0.5)} \psi_{xy} \Big|_{\theta=0} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

4 网格重分步骤

基于线弹性断裂力学的混合裂缝扩展采用 SBFEM 数值模拟步骤为:

(1) 根据位移约束和荷载条件, 通过直线或

边界把初始区域分成几个小区域如图 2a。每个边界与两个结点有关。应有一个小区域包含初始裂缝, 且其几何中心在裂尖, 此小区域称为裂缝小区域, 预计的裂缝路径必须在裂缝小区域内, 不允许超出其边界。

(2) 进一步细分裂缝小区域成 3 个小区域, 其中一个小区域包含裂尖, 见图 2b 中 6, 另外两个小区域 4 和 5 通过重分得到, 称为核心小区域, 图 2b 还表示了几个主要结点和边界。

(3) 根据结点编号离散边界, 与几何中心连接的自由边面和约束边界不离散。

(4) 采用 SBFEM 分析时, 区域主要受到外部荷载向量 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ 从而得到位移场 $\mathbf{U}_0$ 。

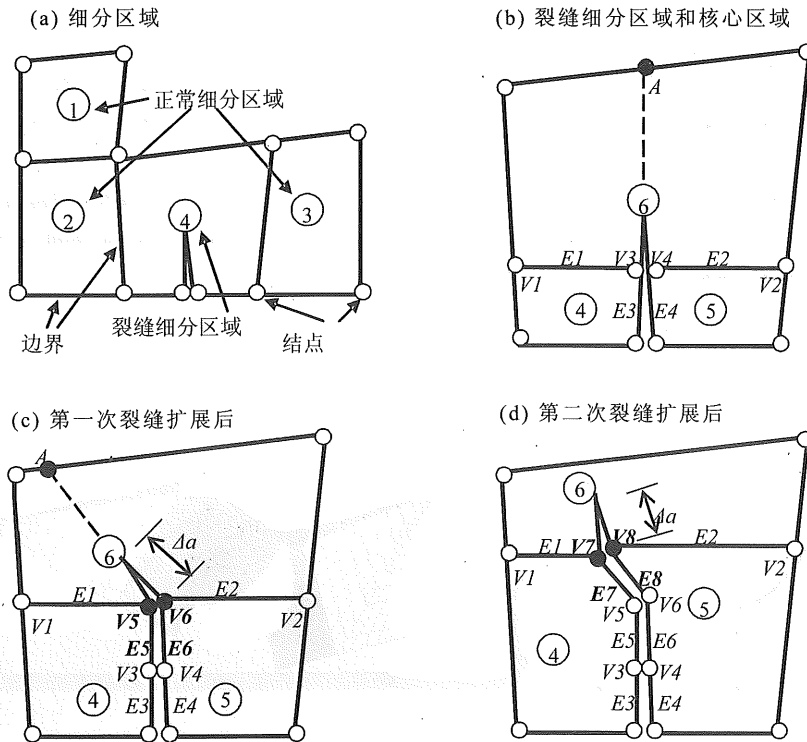


图2 基于 SBFEM 的网格重分步骤

Fig. 2 Remeshing procedure based on SBFEM

(5) 沿着裂缝扩展方向从裂尖延长裂缝线找出与边界相交点如图 2b 点 A, 根据方程 (28) 计算 K_I 和 K_{II} 。

(6) 根据裂缝扩展准则和一定比例的 $\mathbf{u}_0$ 和 $\mathbf{p}_0$ 决定裂缝扩展方向。这里采用最大能量释放率 $G_{\max}$ 准则^[15], 它假设当应力能量释放率 SERR 达到临界值时, 裂缝将扩展。

$$G_{\max} = G(\theta_0) \quad (29)$$

施加外部荷载及相应位移为

$$\mathbf{p}_i = \alpha \mathbf{p}_0 \quad (30)$$

$$\mathbf{u}_i = \alpha \mathbf{u}_0 \quad (31)$$

(7) 通过给定裂缝扩展长度 Δa 进行重分网格如图 2c, 图 2d 表示了当第二次裂缝扩展后的网格重分。

(8) 重复(3) - (7)至裂尖到达主要边界。

5 算例分析

图 3 是四点弯曲梁一半模型^[3], 试件尺寸、初始缝长见图 1 所示。其中混凝土的弹性模量 $E = 24.8 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.18$, 断裂能 $G_f = 150 \text{ N/m}$,

混凝土抗拉强度 $f_t = 4.0 \text{ MPa}$, 为平面应力状态。梁厚为 0.152 m 。

采用图 3 的数据, SBFEM 的初始网格见图 4, 裂缝路径和变形后的网格见图 5, 图 6 得到荷载 (F) 与裂缝口滑动位移 (CMSD) 曲线, 图 7 为荷载 (F) 与其作用点的挠度 (LPD) 曲线。采用 SBFEM 时将此梁分成 5 个区域, 区域 S1 和 S2 的几何中心分别在左上角和右下角, 这样与几何中心相连的两条边不离散。整个梁初始结点数为 121, 其中 97 个结点用于模拟裂缝尖端区域 S5, 这里采用相同初始网格, 分别用裂缝增量来进行模拟, 图

5 (b) 表示了裂缝扩展过程, 变形的网格采用了放大系数为 500 来显示。可见裂缝扩展过程和裂缝扩展路径与实验和非线性有限元计算的结果一致^[3], 带有一定宽度的裂缝轨迹平滑, 且理想。

图 6 中, 尽管 SBFEM 计算出的 F -CMSD 曲线与 NFM 计算出的 F -CMSD 曲线大体上能很好得吻合, 但是在峰值荷载相差 16%。因为混凝土并非单纯的脆性材料, 对于常规尺寸混凝土结构如梁在裂缝前沿存在一定长度的断裂过程区, 在这个区内, 应变能是逐渐扩散的。

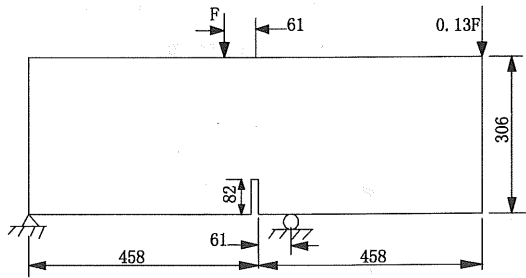


图 3 混合裂缝扩展的四点剪切梁 (单位: mm)

Fig. 3 Four-point single edge-notched shearbeam for mixed-mode crack propagation

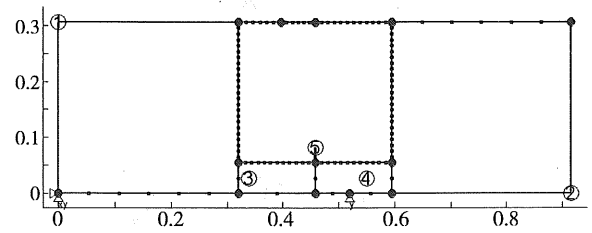


图 4 SBFEM 的初始网格

Fig. 4 Initial mesh of SBFEM

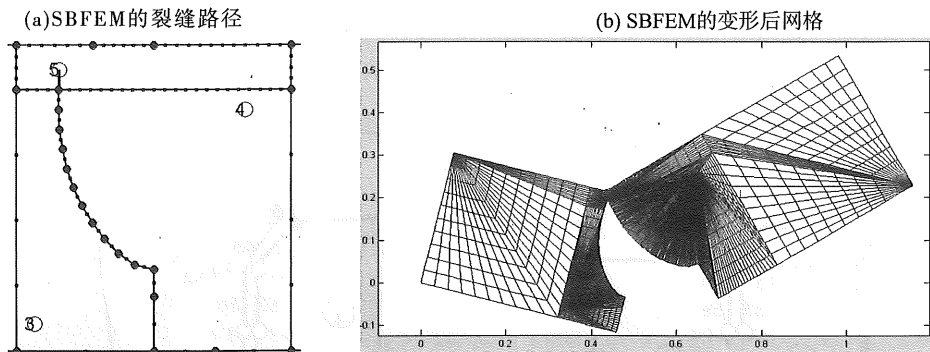


图 5 裂缝路径和变形后的网格

Fig. 5 Cracking path and displaced mesh

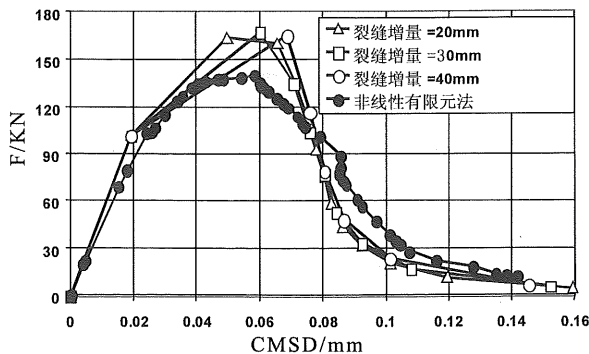


图 6 荷载 (F) 与裂缝口滑动位移 (CMSD) 曲线

Fig. 6 F -CMSD curves

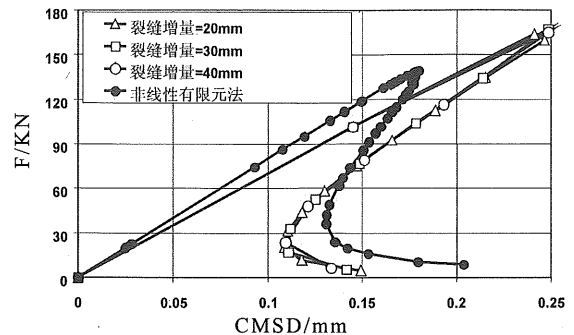


图 7 荷载 (F) 与其作用点的挠度 (LPD) 曲线

Fig. 7 F -LPD curves

LEFM 假设当 K_I 达到 K_{Ic} 时,就形成裂缝,因此不能模拟裂缝扩展,只有通过 NFM 和粘性裂缝模型并结合网格重分才能获得准确的结果,但这样使计算成本大大增加,有时面临数值发散和不稳定的问题。所以对于常规尺寸的混凝土梁,可用 LEFM 计算出的荷载与位移曲线作为初步参考,LEFM 计算出的裂缝扩展轨迹可在用 NFM 计算时用来创造界面单元,从而使 NFM 获得较高的精度。从图 7 可明显看出基于 LEFM 理论 SBFEM 很容易跟踪后跳现象而在 NFM 中难以预测。

6 结 论

从本文可得出,SBFEM 能用于模拟混凝土梁的混合裂缝扩展问题。SBFEM 采用半解析解,SIFS 可直接从应力方程求解,精度很高,区域划分灵活,仅仅对区域边界和细分区域的公共边界进行离散,与几何中心相连的自由边不需离散,这样在进行模型裂缝扩展时,网格重分步骤简单。

通过实例证明 SBFEM 能够预测裂缝扩展轨迹,并能准确有效计算荷载与位移曲线和荷载与其作用点的挠度曲线。

参考文献:

- [1] PETERSSON P. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials [R]. Report TVBM-1006, Lund Inst of Tech, Sweden, 1981.
- [2] XIE M, GERSTLE W H. Energy-based cohesive crack propagation modeling [J]. ASCE J Engng Mech, 1995, 121 (12): 1349 - 458.
- [3] ARREA M, INGRAFFEA A R. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete Report No. 81 - 13 [R]. Cornell University, 1982.
- [4] XIE M, GERSTLE W H, RAHULKUMAR P. Energy-based automatic mixed-mode crack propagation modeling [J]. ASCE J Engng Mech, 1995, 121 (8): 914 - 23.
- [5] CENDON D A, GALVEDZ J C, ELICES M, PLANAS J. Modelling the fracture of concrete under mixed loading [J]. Int J Fract, 2000, 103: 293 - 310.
- [6] YANG Z, CHEN J. Fully automatic modeling of cohesive discrete crack propagation in concrete beams using local arc-length methods [J]. Int J Solids Struct, 2004, 41: 801 - 26.
- [7] YANG Z, CHEN J. Finite element modeling of multiple discrete cohesive crack propagation in reinforced concrete beams [J]. Engng Fract Mech, 2005, 72 (145): 2280 - 97.
- [8] BITTENCOURT T N, WAWRZYNEK P A, INGRAFFEA A R, SOUSA J L. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems [J]. Engng Fract Mech, 1996 (2): 321 - 34.
- [9] BOCCA P, CARPINTERI A, VALENTE S. Mixed-mode fracture concrete [J]. Int J Solid Struct, 1991, 27 (9): 1139 - 53.
- [10] JAMES M A. A plain stress finite element model for elastic-plastic mode I / II crack growth [D]. Kansas State University, 1998.
- [11] HARBAKEN A M, CESCOTTO S. An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming process [J]. Int J Numer Methods Engng, 1990, 30: 1503 - 25.
- [12] WOLF J P, SONG C M. Finite-element modeling of unbounded media [M]. Chichester: John Wiley and Sons, 1996.
- [13] WOLF J P. The scaled boundary finite element method [M]. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
- [14] DEEKS A J, WOLF J P. A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics [J]. Computational Mechanics, 2002, 28 (6): 489 - 504.
- [15] HUSSAIN M A, PU S L, UNDERWOOD J H. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and II [C]. Fracture Analysis, STP 560, ASTM, 1974.

A Numerical Analysis with Scaled Boundary Finite Element Method to Simulate Mixed-mode Crack Propagation for Concrete Beams

YU Xue-fang, LIU Guo-hua

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Based on linear elastic fracture mechanics and the scaled boundary finite element method (SBFEM), numerical simulation was performed for a mixed-mode crack propagation model. From comparing the results with which obtained by the nonlinear finite element method (NFM), SBFEM can predict crack trajectories and compute load-displacement relations as well as load-deflection at loading point accurately and efficiently.

Key words: scaled boundary finite element method, stress intensity factors; mixed-mode crack propagation model; linear elastic fracture mechanics